

Комп'ютерні методи фінансової математики

Основи інвестиційного ринку. Вартість грошей в часі

Стельмахук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

6 жовтня 2022 р.

- 1 Організація курсу
- 2 Основи інвестиційного ринку
 - Акції
 - Біржові товари
 - Облігації
 - Ринок Forex
- 3 Вартість грошей в часі

- Лекційний курс
- Захист практичних завдань - 80 балів
- Теоретичний тест за матеріалами лекцій - 20 балів
- Залік

- Основи інвестиційного ринку. Вартість грошей у часі. Акції та облігації. Біржові товари
- Стохастичні процеси. Вінерівські процеси. Броунівський рух. Геометричний броунівський рух. Процес Іто. Лема Іто.
- Метод Ейлера-Маруями для розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь Іто
- Методи Мільштейна та Рунге-Кутти для розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь Іто
- Опціони. Call/Put опціони. Європейський, американський та екзотичні опціони
- Модель Блека-Шоулза (Black-Scholes model). Виведення рівнянь. Приведення до рівняння дифузії. Аналітичний розв'язок для європейського опціону
- Модель Блека-Шоулза (Black-Scholes model). The greeks (delta, gamma, vega, theta, rho). Метод Монте-Карло для оцінки європейського опціону

- Метод скінченних різниць для моделі Блека-Шоулза
- Метод скінченних елементів для моделі Блека-Шоулза
- Біноміальні дерева для оцінки вартості опціону
- Моделювання відсоткових ставок. Процес Орнштейна-Уленбека. Модель Васічека
- Облігації з нульовим купоном (дисконтні облігації). Застосування моделі Васічека для оцінки їх ціни

- Ruppert D. Statistics and Finance. An Introduction / D. Ruppert. – New York: Springer, 2004. – 496p.
- Buchanan R. An Undergraduate Introduction to Financial Mathematics. 3rd ed. / R. Buchanan. – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2012. – 486p.
- Albrecher H. Introduction to Quantitative Methods for Financial Markets / H. Albrecher, A. Binder, V. Lautscham, Ph. Mayer. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 204p.
- Seydel R.U. Tools for Computational Finance. 6th ed. / R.U. Seydel . – London: Springer-Verlag, 2017. – 508p.
- Petters A.O. An Introduction to Mathematical Finance with Applications. Understanding and Building Financial Intuition / A. O. Petters, X. Dong. – Springer, 2016. – 500p.

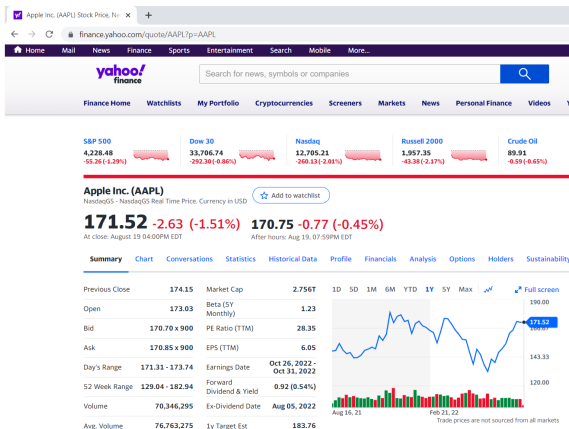
- Hull J. Options, Futures and Other Derivatives. 11th ed. / J. Hull. – Harlow:Pearson, 2021. – 882p.
- Hirs A. Computational Methods in Finance/ A. Hirs. – New York : CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. – 444p.
- Hilber N. Computational Methods for Quantitative Finance. Finite Element Methods for Derivative Pricing. / N. Hilber, O. Reichmann, C. Schwab, C. Winter. – Berlin: Springer-Verlag, 2013. – 312p.
- Fries C.P. Mathematical Finance. Theory, Modeling and Implementation / C.P. Fries. – Wiley, 2007. – 544p.
- Levy G. Computational Finance Using C and C# / G. Levy. – Academic Press, 2008.– 384p.
- Kloeden P.E. Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations / P.E.Kloeden, E. Platen. – Berlin:Springer-Verlag, 1992. – 668p.

- Акції
- Облігації
- Біржові товари
- Ринок Forex

- Акції відображають **володіння** частиною компанії
- Акції надають власнику право на відповідну пропорцію майна та доходу компанії
- Share (доля акції) - найменша частина акції компанії, що може бути придбана
- Компанії можуть випускати акції, щоб інвестори профінансували втілення в життя певної ідеї, яка згодом принесе доходи
- Акції вважаються ризикованою інвестицією
- Власники акцій можуть отримувати дивіденди

Фондові біржі та брокерські фірми (посередники)

- NASDAQ - National Association of Securities Dealers Automated Quotation
- NYSE - New York Stock Exchange
- NYSE American, колишня American Stock Exchange (AMEX)



Біржові товари (Commodities)

- Commodities - сировинні товари, такі як нафта, природний газ, золото
- Робити інвестицію в commodities не так просто напряму
- Тому виникає поняття ф'ючерсів (future contracts) - контракт на купівлю певної сировини в певний час в майбутньому за ціною, зафіксованою на даний момент
- Також ф'ючерси дозволяють компаніям, що залежать від поставок сировини, згладити вплив коливання цін на ці товари на дохідність компанії
- Володіння сировинними товарами може допомогти згладити вплив інфляції, так як ціни на ці товари зазвичай зростають при значному збільшенні рівня інфляції

Облігації (Bonds)

- Облігація - це боргове зобов'язання, яке означає, що інвестор позичає гроші комусь (компанії, уряду)
- Гроші даються в позику на певний наперед визначений період часу та під певну фіксовану чи плаваючу процентну ставку
- Коли компанія хоче профінансувати свої нові проекти вона може випустити облігації замість того, щоб брати кредити в банках
- Відсоткові ставки за облігаціями є зазвичай дещо більшими, ніж відсоткові ставки за депозитами банків
- Ризики дефолту компанії чи уряду, що випустили облігації

- Forex (Foreign Exchange) - біржа обміну валют
- Теж посередниками можуть виступати брокерські фірми
- Учасниками ринку FOREX є:
 - Центральні та комерційні банки;
 - Компанії, що здійснюють зовнішньоторговельні операції;
 - Інвестиційні фонди та організації;
 - Валютні біржі;
 - Брокерські компанії;
 - Дилінгові центри;
 - Приватні особи.

- Вартість суми x грошей сьогодні більша за вартість тієї ж суми x грошей через рік, бо, наприклад, інвестор може купити облігацій на цю суму грошей або ж покласти їх на депозит
- Майбутня вартість FV (Future Value) - скільки буде коштувати товар, що зараз коштує x у майбутньому (наприклад, через n років)
- Теперішня вартість PV (Present Value) - яка сума грошей у даний момент відповідає сумі x у майбутньому (наприклад, через n років)

Вартість грошей в часі. Дискретна та неперервна моделі

- Дискретна модель. Вважаємо, що ринкова відсоткова ставка r - стала величина. Тоді

$$\begin{aligned}FV &= x * (1 + r)^n, \\PV &= \frac{x}{(1+r)^n},\end{aligned}\tag{1}$$

де n - кількість років.

- Неперервна модель. Ринкова відсоткова ставка r - стала величина. Ми хочемо знати, яка вартість грошей $x(t)$ в кожен момент часу. Тоді

$$\begin{aligned}x(t + dt) - x(t) &= \frac{dx}{dt} dt = rx(t)dt, \\ \frac{dx}{dt} &= rx(t), \\ x(t) &= x(0)e^{rt},\end{aligned}\tag{2}$$

тобто

$$\begin{aligned}FV(t) &= PV * e^{rt}, \\ PV &= FV(t) * e^{-rt}.\end{aligned}\tag{3}$$

Стохастичні процеси. Вінерівські процеси. Броунівський рух. Лема Іто. Геометричний броунівський рух

Стельмащук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

13 жовтня 2022 р.

- **Стохастичний (випадковий процес)** - сімейство випадкових змінних X_t , що визначене відносно системи параметрів t . Часто $t \in [0, T]$ - це час, а $X_t = X(t)$ - випадкова змінна для кожного $t \in [0, T]$.
- Неперевний в часі стохастичний процес $\{X_t; t \in [0, T]\}$ називається **процесом Гауса** тоді і тільки тоді, якщо для будь-якої скінченної множини індексів $t_1, \dots, t_k$ з множини $[0, T]$ випадкова змінна $X_{t_1, \dots, t_k} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ має багатовимірний нормальний розподіл. Іншими словами: кожна лінійна комбінація $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ має одновимірний нормальний розподіл.
- Неперевний в часі стохастичний процес $\{X_t; t \in [0, T]\}$ називається **процесом Маркова** (чи має властивість **Маркова**), якщо на його наступне значення впливає лише теперішнє значення X_t .

Броунівський рух. Вінерівські процеси

- Броунівський рух названо на честь Роберта Броуна, який ще в 1827 році спостерігав рух частинок пилку в воді.
- Вперше математично описав такий рух частинок Норберт Вінер у 1923-1924 роках.
- Броунівський рух називають ще "випадковим блуканням" (random walk), а також вінерівським процесом.
- Стохастичний процес $W_t, t \in [0, T]$ називають **вінерівським**, якщо:
 - W_t - неперервний і $W_0 = 0$
 - $W_t \sim N(0, t) \forall t \geq 0$, тобто для кожного t випадкова змінна W_t розподілена нормально з математичним сподіванням $E(W_t) = 0$ та дисперсією $V(W_t) = E(W_t^2) = t$.
 - Приріст $dW_t = W_{t+dt} - W_t$ - нормально розподілений, тобто $dW_t \sim N(0, dt)$, а отже $E(dW_t) = 0$ та $V(dW_t) = dt$. З цього також випливає, що приріст dW_t не залежить від історії процесу до моменту часу t .

Алгоритм

- Розбиваємо часовий інтервал $[0, T]$ на N підінтервалів,
 $\Delta t = \frac{T}{N}$
- Починаємо з $W_0 = 0$
- Для кожного $j = 1, 2, \dots, N$:
 $t_j = t_{j-1} + \Delta t$;
 $\Delta W \sim \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$;
 $W_j = W_{j-1} + \Delta W$.

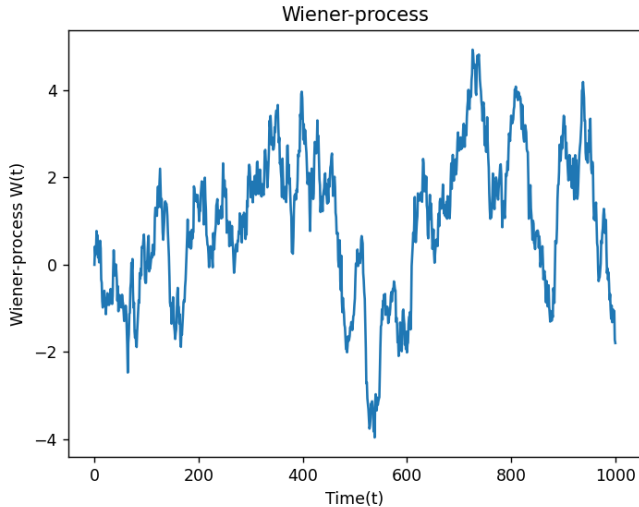


Рис.: Приклад вінерівського процесу

Броунівська модель ціни фінансових активів

- Вінерівський процес може набувати від'ємних значень, тому очевидно, що він не дуже підходить до моделювання цін на активи.
- **Дохідність** активу (наприклад акції) в момент часу t визначається за формулою:

$$R_t = \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \frac{dS_t}{S_t}, \quad (1)$$

де S_t - ціна активу в момент часу t .

- Дохідність моделюється броунівським рухом з дрейфом (drift) і параметром волатильності (volatility):

$$R_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (2)$$

де μdt - визначає тренд дохідності активу, σdW_t - відповідає за випадковість. Тут μ - параметр дрейфу (в процентах), σ - параметр волатильності (в процентах).

Броунівська модель ціни фінансових активів.

Геометричний броунівський рух

- З рівняння (2) випливає:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3)$$

- Стохастичний процес S_t , що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння (3) називають **геометричним броунівським рухом** (Geometric Brownian Motion).
- **Відносні**, а не **абсолютні** зміни в ціні активу задовольняють броунівський рух з дрейфом.

Процес Іто

Стохастичний процес X_t , що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t, \quad (4)$$

називають **процесом Іто** (Ito process).

$a(X_t, t)$ - коефіцієнт дрейфу (drift),

$b(X_t, t)$ - коефіцієнт дифузії (diffusion),

W_t - вінерівський процес.

Лема Іто

- Аналог правила диференціювання складної детермінованої функції:

$$\frac{d}{dt}g(x(t), t) = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t} \quad (5)$$

Лема Іто

Нехай X_t задовольняє рівняння процесу Іто:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t, \quad (6)$$

та $g(x, t)$ - $C^{2,1}$ -гладка функція (існують неперевні похідні $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial g}{\partial t}$).

Тоді випадкова змінна $Y_t := g(X_t, t)$ задовольняє процес Іто з таким самим вінерівським процесом W_t :

$$dY_t = \left(\frac{\partial g}{\partial x} a + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} b dW_t, \quad (7)$$

де всі похідні від g і коефіцієнти a та b насправді залежать від (X_t, t) .

Доведення

Через розклад функції від двох змінних у ряд Тейлора і оцінку кожного доданка при $dt \rightarrow 0$. Детальніше, наприклад тут:

Levy G. Computational Finance Using C and C# / G. Levy. – Academic Press, 2008 – 384p.

- Геометричний броунівський рух описується стохастичним рівнянням:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (8)$$

- Лема Іто для цього рівняння:

$$dg(S_t, t) = \left(\frac{\partial g}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x} \sigma S_t dW_t, \quad (9)$$

- Розглянемо функцію $g(S_t, t) = \ln(S_t)$.
- Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial S_t} &= \frac{\partial(\ln(S_t))}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{1}{S_t} \right) = -\frac{1}{S_t^2} \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

- Підставимо похідні (10) у рівняння (9):

$$dg(S_t, t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t, \quad (11)$$

тобто $g(S_t, t) = \ln(S_t)$ задовольняє рівняння броунівського руху з дрейфом $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ та волатильністю σ .

- Проінтегрувавши ліву і праву частини рівності (11), отримаємо:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t, \forall t \in (0, T]. \quad (12)$$

- З рівності (12) отримаємо:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \forall t \in (0, T]. \quad (13)$$

Метод Ейлера-Маруяма для розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь Іто

Стельмащук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

20 жовтня 2022 р.

Стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t, x \in [t_0, T], X_{t_0} = X_0 \quad (1)$$

Апроксимація Ейлера-Маруями

Неперевний в часі стохастичний процес $Y = \{Y(t), t_0 \leq t \leq T\}$ називається дискретною апроксимацією Ейлера-Маруями, якщо для заданої дискретизації $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ часового інтервалу $[t_0, T]$ він задовольняє ітераційну схему:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + a(Y_n, \tau_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(Y_n, \tau_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}) \\ \forall n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $Y_0 = X_0$, $Y_n = Y(\tau_n)$.

Алгоритм Ейлера-Маруями

Апроксимація Ейлера-Маруями

На практиці часто використовують рівномірну сітку вузлів на часовому інтервалі:

$$\Delta t = \frac{T - t_0}{N} \quad (3)$$

Введемо позначення:

$$\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}. \quad (4)$$

Тоді схема (2) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + a(Y_n, \tau_n)\Delta t + b(Y_n, \tau_n)\Delta W_n \\ \forall n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5)$$

Алгоритм Ейлера-Маруями

- $Y_0 = X_0$. Для кожного $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$:

$$t_{j+1} = t_j + \Delta t;$$

$$\Delta W \sim \sqrt{\Delta t} N(0, 1);$$

$$Y_{j+1} = Y_j + a(Y_j, t_j)\Delta t + b(Y_j, t_j)\Delta W.$$

Слабкий і сильний розв'язок

- Як відомо, рівняння, що описує геометричний броунівський рух

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (6)$$

має аналітичний розв'язок:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \forall t \in (0, T]. \quad (7)$$

- В залежності від конкретної реалізації вінерівського процесу W_t , розв'язок S_t набуватиме різних значень. Такий розв'язок S_t для конкретної реалізації вінерівського процесу W_t називається **траєкторією**.
- Якщо нам задано конкретний вінерівський процес W_t , то тоді розв'язок S_t називається **сильним розв'язком**.
- Якщо ми вільні у виборі вінерівського процесу W_t , то тоді розв'язок S_t називається **слабким розв'язком**. У випадку слабого розв'язку нас цікавить лише розподіл S_t , а не його індивідуальна траєкторія.
- Для інших процесів Іто означення аналогічні.

- Нехай Y_t^h - чисельна апроксимація процесу Іто, що задовольняє рівняння (1). Тут $h := \Delta t$.
- Взявши ідентичну траєкторію однакового вінерівського процесу процес W_t для стохастичного рівняння і для чисельної апроксимації, ми можемо порівнювати значення X_t та Y_t^h для будь-якого вузла сітки t_j .
- Абсолютна похибка апроксимації сильного розв'язку дорівнює $|X_T - Y_T^h|$. Для іншої траєкторії така абсолютна похибка буде іншою. Ми зацікавлені в середньому значенні абсолютної похибки для всіх траєкторій.
- Отже, **абсолютна похибка** апроксимації Y_t^h сильного розв'язку X_t рівняння (1) визначається за формулою:

$$e(h) := E(|X_T - Y_T^h|). \quad (8)$$

- Проводимо N експериментів, вибираючи іншу конкретну траєкторію вінерівського процесу W_t .
- Обчислюємо аналітичний і чисельний розв'язки згідно цієї траєкторії процесу W_t .
- Порівнюємо розв'язки і усереднюємо:

$$\hat{e}(h) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |X_{T,k} - Y_{T,k}^h|. \quad (9)$$

- **Сильна збіжність.** Y_T^h збігається **сильно** до X_T з порядком збіжності $\gamma > 0$, якщо

$$e(h) := E(|X_T - Y_T^h|) = O(h^\gamma). \quad (10)$$

Y_T^h збігається **сильно**, якщо

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(|X_T - Y_T^h|) = 0. \quad (11)$$

- **Слабка збіжність.** Y_T^h збігається **слабко** до X_T згідно функції g з порядком збіжності $\beta > 0$, якщо

$$E(g(X_T)) - E(g(Y_T^h)) = O(h^\beta). \quad (12)$$

Y_T^h збігається **слабко** з порядком збіжності $\beta > 0$, якщо (12) виконується для всіх поліномів g .

Сильна та слабка збіжність. Метод Ейлера-Маруями

Відношення між сильною та слабкою збіжністю

- **Слабка збіжність.** З використання полінома $g(x) = x$ впливає збіжність математичних сподівань.
- **Слабка збіжність.** З використання полінома $g(x) = x^2$ впливає збіжність дисперсій.
- З сильної збіжності впливає слабка збіжність за поліномом $g(x) = x$, тобто збіжність математичних сподівань.

Метод Ейлера-Маруями і збіжність

*Kloeden P.E. Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations
P.E.Kloeden, E. Platen. – Berlin:Springer-Verlag, 1992. – 668p.*

- Апроксимації методу Ейлера-Маруями сильно збіжні з порядком збіжності $\gamma = \frac{1}{2}$.
- Апроксимації методу Ейлера-Маруями слабо збіжні з порядком збіжності $\beta = 1$.

Методи Мільштейна та Рунге-Кутти для розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь Іто

Стельмащук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

27 жовтня 2022 р.

Стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t, x \in [t_0, T], X_{t_0} = X_0 \quad (1)$$

Апроксимація Мільштейна

Неперевний в часі стохастичний процес $Y = \{Y(t), t_0 \leq t \leq T\}$ називається дискретною апроксимацією Мільштейна, якщо для заданої дискретизації $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ часового інтервалу $[t_0, T]$ він задовольняє ітераційну схему:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + a(Y_n, \tau_n)\Delta t + b(Y_n, \tau_n)\Delta W_n \\ &+ \frac{1}{2}b(Y_n, \tau_n)b'(Y_n, \tau_n) [(\Delta W_n)^2 - \Delta t] \\ \forall n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $Y_0 = X_0$, $Y_n = Y(\tau_n)$, $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$.

Виводиться з розкладу в ряд Іто-Тейлора.

Алгоритм Мільштейна

- $Y_0 = X_0$. $\Delta t = \frac{T-t_0}{N}$.
Для кожного $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$:
 $t_{j+1} = t_j + \Delta t$;
 $\Delta W \sim \sqrt{\Delta t} N(0, 1)$;
 $Y_{j+1} = Y_j + a(Y_j, t_j)\Delta t + b(Y_j, t_j)\Delta W + \frac{1}{2}b(Y_j, t_j)b'(Y_n, t_j) [(\Delta W)^2 - \Delta t]$.

Сильна та слабка збіжність

- Метод Мільштейна сильно збіжний з порядком $\gamma = 1$.
- Метод Мільштейна слабо збіжний з порядком $\beta = 1$.
- Доведення: Kloeden P.E. *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations* P.E.Kloeden, E. Platen. – Berlin:Springer-Verlag, 1992. – 668p.
- Коли $b(X_t, t)$ насправді не залежить від X_t , метод Мільштейна вироджується в метод Ейлера-Маруяма.

Схема Платена-Вагнера. Порядок збіжності 1.5

$$\begin{aligned}(4.1) \quad Y_{n+1} = & Y_n + a \Delta + b \Delta W + \frac{1}{2} b b' \{(\Delta W)^2 - \Delta\} \\ & + a' b \Delta Z + \frac{1}{2} \left(a a' + \frac{1}{2} b^2 a'' \right) \Delta^2 \\ & + \left(a b' + \frac{1}{2} b^2 b'' \right) \{ \Delta W \Delta - \Delta Z \} \\ & + \frac{1}{2} b \left(b b'' + (b')^2 \right) \left\{ \frac{1}{3} (\Delta W)^2 - \Delta \right\} \Delta W.\end{aligned}$$

Here the additional random variable ΔZ is required to represent the double integral

$$(4.2) \quad \Delta Z = I_{(1,0)} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \int_{\tau_n}^{s_2} dW_{s_1} ds_2.$$

Рис.: Схема Платена-Вагнера

*Kloeden P.E. Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations
P.E.Kloeden, E. Platen. – Berlin:Springer-Verlag, 1992. – 668p.*

- Недоліком методів побудованих за допомогою розвинень в ряд Тейлора є необхідність обчислення похідних a' , b' , ...
- По аналогії з випадком звичайних диференціальних рівнянь існують альтернативні методи, які вимагають тільки обчислень значень функцій a , b , а не їх похідних різних порядків. Такі методи називають **методами Рунге-Кутти**.
- З методу Мільштейна виведемо альтернативний метод Рунге-Кутти з тим же ж порядком сильної збіжності.
- Почнемо з рівності:

$$b(y + \Delta y) - b(y) = b'(y)\Delta y + O((\Delta y)^2) \quad (3)$$

- Враховуючи, що $\Delta y = a\Delta t + b\Delta W$, отримаємо:

$$b(y + \Delta y) - b(y) = b'(y)(a\Delta t + b\Delta W) + O((\Delta y)^2) \quad (4)$$

Метод Рунге-Кутти з сильною збіжністю порядку $\gamma = 1$

- Оскільки $E((\Delta W)^2) = \Delta t$, то рівність (4) можна спростити до вигляду:

$$b(y + \Delta y) - b(y) = b'(y)b(y)\Delta W + O(\Delta t) \quad (5)$$

- Підставимо $\Delta W = \sqrt{\Delta t}$ і отримаємо таку оцінку добутку $b(y)b'(y)$ з точністю $O(\sqrt{\Delta t})$:

$$b(y)b'(y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \left(b(y + a(y)\Delta t + b(y)\sqrt{\Delta t}) - b(y) \right) \quad (6)$$

- В результаті отримуємо таку схему методу Рунге-Кутти:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= y_j + a\Delta t + b\sqrt{\Delta t} \\ y_{j+1} &= y_j + a\Delta t + b\Delta W + \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}}(\Delta W^2 - \Delta t)[b(\hat{y}) - b(y)] \end{aligned} \quad (7)$$

Опціони. Call/Put опціони. Європейський, американський та екзотичні опціони

Стельмахук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

3 листопада 2022 р.

Деривативи (Derivatives)

- **Дериватив** - це укладений контракт щодо якогось базового активу (underlying asset). Ціна дериватива визначається виходячи з ціни базового активу.
- Приклади базового активу: акції, облігації, біржові товари, відсоткові ставки.
- Використовуються для:
 - Обмеження ризику (hedge risk).

Приклад. Ціни на нафту і відповідно на пальне - дуже волатильні. Компанії, чия діяльність надто залежить від пального (наприклад, авіакомпанії) дуже ризикують. Тому вони укладають договори з нафтовидобувними компаніями про закупівлю нафти/пального за фіксованою наперед ціною через деякий час у майбутньому (через декілька місяців, рік, тощо). Таким чином вони страхують себе від потенційних збитків, якщо ціна на нафту сильно зростає. З іншого боку, такий договір також вигідний нафтовидобувним компаніям, адже вони страхують себе від стрімкого падіння цін на нафту.
 - Спекуляції (отримати вигоду від того, що ціна на базовий актив зміниться в очікуваному інвестором напрямку).

- **Форвардний контракт** - це договір укладений між двома сторонами про купівлю/продажу базового активу (акції, облігації, біржові товари) за наперед домовленою ціною в певний момент у майбутньому. Договір не стандартизований і ним не можна торгувати на біржі.
- **Ф'ючерсний контракт** - такий самий зміст договору, як при форвардному контракті, але він стандартизований і може торгуватися на біржі. Покупець ф'ючерсного контракту має право продати такий контракт протягом строку його дії іншим особам без погодження умов такого продажу з продавцем контракту.
- **Своп (Swap)** - договір про обмін товарами в майбутньому між сторонами.
- **Опціон (Option)** - контракт, що дає **право (не обов'язок)** купити чи продати базовий актив за заданою ціною в майбутньому. **Премія опціону** — це сума грошей, що сплачується покупцем опціону продавцеві

- Купимо актив, якщо ціна на нього піднялася:

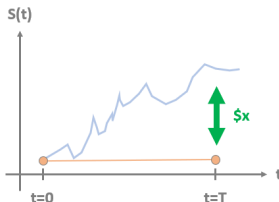
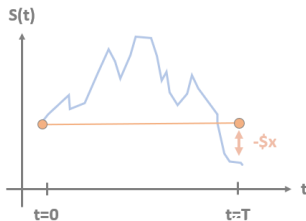


Рис.: Ціна активу зросла

- Не будемо купувати актив, якщо ціна на нього впала:



Call опціон - право **купити** певний актив (акцію) за домовленою ціною **E** в момент часу **T** в майбутньому.

- У випадку Call опціону ми спекулюємо на очікуванні, що ціна на актив зросте.
- **E** - Exercise price (strike price)
- **T** - Expiration date (expiry) / Дата виконання
- **S(t)** - Ціна активу (акції)
- **V(S,t)** - Ціна опціону
- **V(S,T) = max(S(T) - E, 0)** - Ціна опціону в дату виконання

Put опціон - право **продати** певний актив (акцію) за домовленою ціною **E** в момент часу **T** в майбутньому.

- У випадку Put опціону ми спекулюємо на очікуванні, що ціна на актив впаде.
- **E** - Exercise price (strike price)
- **T** - Expiration date (expiry) / Дата виконання
- **S(t)** - Ціна активу (акції)
- **V(S,t)** - Ціна опціону
- **V(S,T) = max(E-S(T), 0)** - Ціна опціону в дату виконання

Емітент опціону є короткою стороною (англ. short) контракту, власник — довгою стороною (англ. long). Відповідно є чотири можливі позиції в опціонах:

- купити купівельний опціон (long call)
- емітувати купівельний опціон (short call)
- купити опціон продажу (long put)
- емітувати опціон продажу (short put)

Long call. Діаграма прибутку

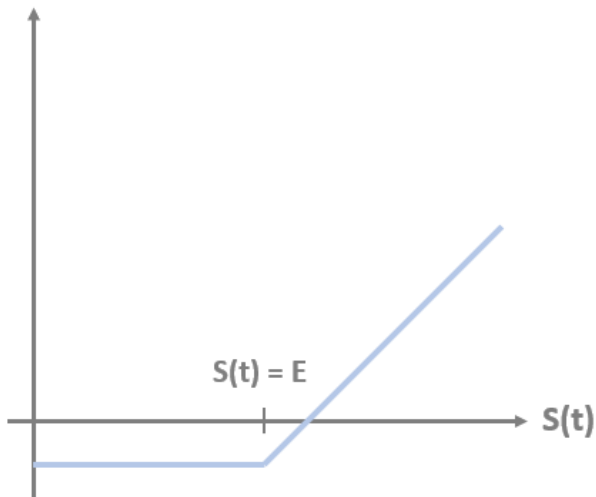


Рис.: Long call. Діаграма прибутку

Long put. Діаграма прибутку

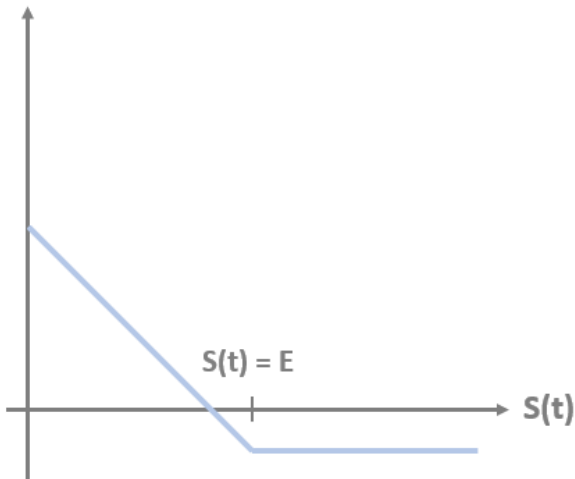


Рис.: Long put. Діаграма прибутку

Європейський та американський опціони

Європейський опціон

Європейський опціон - це опціон, який може бути виконаний тільки в дату виконання T .

Американський опціон

Американський опціон - це опціон, який може бути виконаний в будь-який момент часу до дати виконання T .

Відношення між американськими та європейськими опціонами

- Ціна американського Call опціону завжди дорівнює ціні європейського Call опціону
- Ціна американського Put опціону зазвичай відрізняється (більша) за ціну європейського Put опціону

[] Ruppert D. *Statistics and Finance. An Introduction* / D. Ruppert. – New York: Springer, 2004. – 496p.

Put/Call паритет для європейського опціону

Table 11.2 Portfolios illustrating put-call parity.

		$S_T > K$	$S_T < K$
Portfolio A	Call option	$S_T - K$	0
	Zero-coupon bond	K	K
	Total	S_T	K
Portfolio C	Put Option	0	$K - S_T$
	Share	S_T	S_T
	Total	S_T	K

Рис.: Портфелі, що ілюструють Put/Call паритет

□ Hull J. *Options, Futures and Other Derivatives*. 11th ed. / J. Hull. – Harlow: Pearson, 2021. – 882p.

Європейський опціон

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0 \quad (1)$$

Американський опціон

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT} \quad (2)$$

□ *Hull J. Options, Futures and Other Derivatives. 11th ed. / J. Hull. – Harlow:Pearson, 2021. – 882p.*

- Велика різноманітність
- Емітент намагається привабити покупця покращеними умовами
- Нестандартні американські опціони:
 - Виконати опціон можна лише в певні конкретні дати перед датою виконання опціону (Бермудський опціон)
 - Виконати опціон можна лише в певний період життя опціону
 - Execution price (strike price) може змінюватися під час життя опціону
- Азійські опціони - опціони, в яких виплата залежить від середнього арифметичного ціни базового активу протягом життя опціону. Тобто, виплата дорівнює $\max(0, S_{average} - K)$ для call опціону і $\max(0, K - S_{average})$ для put опціону.

Модель Блека-Шоулза (Black-Scholes model). Виведення рівнянь. Приведення до рівняння дифузії. Аналітичний розв'язок для європейського опціону

Стельмашук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

10 листопада 2022 р.

Модель Блека-Шоулза

- Сформульована Блеком і Шоулзом у 1973р.
- 1997р - Нобелівська премія за це дослідження
- Дозволяє обчислити ціну опціону $V(S, t)$ у будь-який момент часу $t < T$
- Показує, що комбінування ризикованими активами дозволяє уникнути ризику взагалі

Припущення про активи

- Зміна ціни акції в часі описується геометричним броунівським рухом
- Ринкова відсоткова ставка за безризиковим активом r - стала величина
- Дивіденди за акцією не виплачуються

Припущення про ринок

- Немає можливості для арбітражу (безризикового спекулятивного доходу)
- Можливість купувати і продавати будь-яку кількість акцій (навіть дробову)
- Всі транзакції з активами - безкоштовні (немає комісій)
- Торгівля активами - неперервна

Специфічний портфель

- Геометричний броунівський рух для ціни акції:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

- Лема Іто для ціни опціону $V(S_t, t)$:

$$dV(S_t, t) = \left(\frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

- Ідея в тому, щоб скомбінувати в один портфель опціони на акцію і самі акції таким чином, щоб вилучити взагалі доданки, що залежать від випадкового вінерівського процесу W_t
- Тому розглянемо портфель, де є -1 опціон (коротка позиція) та Δ акцій (довга позиція).

- Вартість портфоліо:

$$\pi(t) = \Delta S_t - V(S_t, t) \quad (3)$$

- Зміна вартості портфоліо $d\pi = \pi(t + dt) - \pi(t)$:

$$d\pi = \Delta dS_t - dV(S_t, t) \quad (4)$$

- Зміна вартості портфоліо після підстановки:

$$d\pi = \Delta (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) - \left(\left(\frac{\partial V}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \right) \quad (5)$$

Модель Блека-Шоулза. Виведення рівняння

- Зміна вартості портфоліо після перетворень:

$$d\pi = \left[\left(\Delta - \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \mu S_t - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \right] dt + \left(\Delta - \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t \quad (6)$$

- Якщо виберемо $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$, то нам вдасться позбутися доданку з вінерівським процесом:

$$d\pi = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt \quad (7)$$

- З іншого боку, зміна в вартості портфелю не може бути більшою, ніж приріст безризикового активу, тому:

$$d\pi = r\pi dt \quad (8)$$

- Прирівнюючи (7) та (8), отримаємо:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt = r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S_t} S_t \right) dt \quad (9)$$

Модель Блека-Шоулза. Виведення рівняння

- Скоротивши на dt та позначивши $S = S_t$ отримаємо:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (10)$$

- Рівняння (10) відносно ціни опціону V називається рівнянням Блека-Шоулза.
- Рівняння (10) - параболічне та зводиться до рівняння дифузії (теплопровідності).
- Для знаходження конкретного розв'язку рівняння (10) повинно бути доповнене відповідними кінцевою (в точці $t = T$) та крайовими умовами.
- Для європейського Call опціону ці умови матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} V(0, t) &= 0 \quad \forall t \leq T \\ V(S, t) &= S - Ke^{-r(T-t)} \quad \forall t \leq T, S \rightarrow \infty \\ V(S, T) &= \max(S - K, 0) \quad \forall S \end{aligned} \quad (11)$$

Зведення рівняння Блека-Шоулза до рівняння теплопровідності

Заміна змінних

$$S = Ke^x \implies x = \ln \frac{S}{K} \quad (12)$$

$$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \implies \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t) \quad (13)$$

$$V(S, t) = Kv(x, \tau) \quad (14)$$

Похідні

$$\frac{\partial V}{\partial S} = e^{-x} v_x \quad (15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{K\sigma^2}{2} v_\tau \quad (16)$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial S^2} = \frac{e^{-2x}}{K} (v_{xx} - v_x) \quad (17)$$

Зведення рівняння Блека-Шоулза до рівняння теплопровідності

Рівняння Блека-Шоулза після підстановки (12)-(17) у (10)

$$v_\tau = v_{xx} + (k - 1)v_x - kv, \quad (18)$$

$$k = \frac{2r}{\sigma^2} \quad (19)$$

Ще одна заміна змінних

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} v_x &= e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha u(x, \tau) + u_x) \\ v_{xx} &= e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha^2 u(x, \tau) + 2\alpha u_x + u_{xx}) \\ v_\tau &= e^{\alpha x + \beta \tau} (\beta u(x, \tau) + u_\tau) \end{aligned} \quad (21)$$

Зведення рівняння Блека-Шоулза до рівняння теплопровідності

Підстановка (20)-(21) у (18)

$$u_\tau = (\alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta)u + (2\alpha + k - 1)u_x + u_{xx} \quad (22)$$

Вибір α і β

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1-k}{2} \\ \beta &= -\frac{(k+1)^2}{4} \end{aligned} \quad (23)$$

Рівняння теплопровідності

$$u_\tau = u_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \tau \in (0, \frac{T\sigma^2}{2}) \quad (24)$$

Зведення рівняння Блека-Шоулза до рівняння теплопровідності

Call опціон

$$\begin{aligned}u_\tau &= u_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \tau \in (0, \frac{T\sigma^2}{2}); \\u(x, 0) &= (e^{(k+1)x/2} - e^{(k-1)x/2})^+ \quad \text{при } x \in (-\infty, \infty); \\u(x, \tau) &\rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad \text{для } \tau \in (0, \frac{T\sigma^2}{2}); \\u(x, \tau) &\rightarrow (e^{\frac{(k+1)}{2}[x+(k+1)\tau/2]} - e^{\frac{(k-1)}{2}[x+(k-1)\tau/2]}) \\&\quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad \text{для } \tau \in (0, \frac{T\sigma^2}{2}).\end{aligned} \tag{25}$$

Рівняння Блека-Шоулза. Аналітичний розв'язок

Метод розв'язування

Застосовується перетворення Фур'є до рівняння (25).

Повний процес розв'язування можна переглянути в

Buchanan R. An Undergraduate Introduction to Financial Mathematics. 3rd ed. / R. Buchanan. – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2012. – 486p.

Розв'язок. Формули Блека-Шоулза

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (26)$$

$$P(S, t) = -SN(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) \quad (27)$$

Використані позначення

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad (28)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} \quad (29)$$

Модель Блека-Шоулза (Black-Scholes model) Віталій Стельмашук

Формули Блека-Шоулза. Кумулятивна функція стандартного нормального розподілу

Кумулятивна функція стандартного нормального розподілу

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (30)$$

Figure 15.3 Shaded area represents $N(x)$.

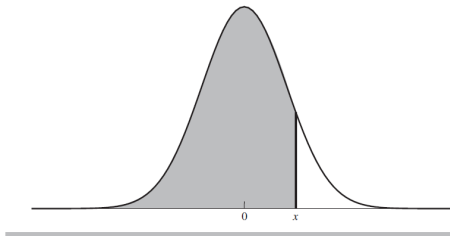


Рис.: Кумулятивна функція стандартного нормального розподілу

Модель Блека-Шоулза (Black-Scholes model).
The greeks (delta, gamma, vega, theta, rho).
Метод Монте-Карло для оцінки європейського
опціону

Стельмашук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

17 листопада 2022 р.

Приклад

- Нехай ціна на акцію рівна 100\$, а ціна на відповідний call-опціон - 10\$
- Нехай $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = 0.6$.
- Інвестор продав 2000 call-опціонів на акцію (short position).
- Тоді щоб захистити себе від ризику втрати, йому необхідно купити $0.6 * 2000 = 1200$ акцій (long position).
- Якщо ціна на акцію виросте на 1\$, то ціна на відповідний call-опціон виросте на $0.6 * 1 = 0.6$ \$. Тоді з акцій інвестор отримає 1200\$ прибутку, а з опціонів - $0.6 * 2000 = 1200$ \$ втрат. Тому його позиція не зміниться.
- Якщо ж ціна на акцію впаде на 1\$, то ціна на відповідний call-опціон впаде на $0.6 * 1 = 0.6$ \$. Тоді з акцій інвестор отримає 1200\$ втрат, а з опціонів - $0.6 * 2000 = 1200$ \$ прибутку. Тому його позиція знову ж не зміниться.

- $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ - чутливість ціни опціону до ціни на відповідну акцію. Δ портфелю - це сума Δ кожної позиції в портфелі. Використовується в Δ -hedging.
- $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ - чутливість Δ до ціни на відповідну акцію. Γ - це міра того, як часто портфель має бути re-hedged, щоб він залишався в Δ -нейтральній позиції. Δ -нейтральна позиція - це позиція, при якій вартість портфелю залишається незмінною при незначних змінах в ціні відповідної акції.
- $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$ - швидкість зміни вартості опціону в часі.
- $Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$ - швидкість зміни вартості опціону по відношенню до волатильності σ .

Рівняння Блека-Шоулза

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (1)$$

Рівняння Блека-Шоулза з The greeks

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS \Delta - rV = 0 \quad (2)$$

- Не існує чіткого означення, система методів
- Дозволяє розв'язувати детерміністичні проблеми за допомогою ймовірностей
- Вперше був використаний в 1940-их роках в Manhattan Project

Приклад

- Оцінити площу круга, вписаного в квадрат зі стороною a .
- Для цього будемо випадковим чином генерувати велику кількість точок, що попадають в цей квадрат і будемо підраховувати скільки з них попадають і в круг
- Тоді площу круга можна оцінити таким чином:

$$S_{circle} = a^2 \frac{\textit{points within the circle}}{\textit{total number of points}} \quad (3)$$

Метод Монте-Карло для оцінки вартості європейського опціону

- Зміна ціни на акцію описується геометричним броунівським рухом:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (4)$$

що має аналітичний розв'язок:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \forall t \in (0, T]. \quad (5)$$

- Для великої кількості ітерацій N (не менше 10000) рахуємо $S(T)$ за формулою (5), використовуючи щораз іншу траєкторію процесу Вінера.
- Для кожної ітерації i рахуємо відповідну ціну європейського опціону.

Call-опціон:

$$C_i(T) = \max(S(T) - E, 0) \quad (6)$$

Put-опціон:

$$P_i(T) = \max(E - S(T), 0) \quad (7)$$

Метод Монте-Карло для оцінки вартості європейського опціону (продовження)

- Рахуємо середнє арифметичне значення ціни опціону для всіх ітерацій:

Call-опціон:

$$C_{average}(T) = \frac{\sum_{i=1}^N C_i(T)}{N} \quad (8)$$

Put-опціон:

$$P_{average}(T) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i(T)}{N} \quad (9)$$

- Для оцінки вартості опціону в початковий момент часу обчислюємо Present Value від отриманого середнього значення.

$$\begin{aligned} C(0) &= e^{-rT} C_{average}(T), \\ P(0) &= e^{-rT} P_{average}(T). \end{aligned} \quad (10)$$

Біноміальні методи для оцінки вартості опціону

Стельмащук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

1 грудня 2022 р.

- На практиці часто є зацікавленість тільки в значенні вартості опціону в даний момент часу $V(S_0, 0)$, коли відома ціна самої акції S_0 . Тому немає змісту обраховувати значення $V(S, t)$ для всієї області, щоб тільки виділити з отриманих результатів $V(S_0, 0)$.
- Відносно мале завдання з обрахування $V(S_0, 0)$ може бути виконано з допомогою **біноміального методу**, який базується на дерево-подібній сітці вузлів, в кожному з яких застосовуються відповідні бінарні правила. Сітка не є визначеною наперед, а будується самим біноміальним методом.

Біноміальний метод. Дискретна модель

Поділимо часовий інтервал $[0, T]$ на M рівних підінтервалів і введемо позначення:

$$\begin{aligned}\Delta t &:= \frac{T}{M}; \\ t_i &:= i\Delta t, i = 0, \dots, M; \\ S_i &:= S(t_i).\end{aligned}\tag{1}$$

Припущення біноміального методу

- 1 Ціна S під час кожного періоду часу Δt може змінитися тільки або вгору на Su ("up"), або вниз на Sd ("down"), де $0 < d < u$
- 2 Ймовірність руху ціни вгору $P(up) = p$.
- 3 Математичне сподівання та дисперсія S відповідають їхнім неперервним відповідникам, що обчислені для відсоткової ставки безризикового активу r .

Біноміальний метод. Дискретна модель

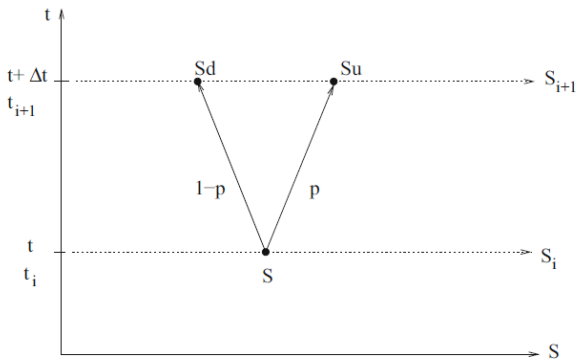


Рис.: Біноміальний метод. Дискретна модель

[] Seydel R.U. *Tools for Computational Finance*. 6th ed. / R.U. Seydel . – London: Springer-Verlag, 2017. – 508p.

- Математичне сподівання для дискретного випадку:

$$E(S_{i+1}) = pS_i u + (1 - p)S_i d \quad (2)$$

- Математичне сподівання для неперервної моделі:

$$E(S_{i+1}) = S_i e^{r\Delta t} \quad (3)$$

- Прирівнюємо (2) та (3):

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d. \quad (4)$$

- З останньої рівності

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (5)$$

Біноміальний метод. Виведення рівнянь

- Дисперсія для неперервної моделі:

$$E(S_{i+1}^2) = S_i^2 e^{r\Delta t} \quad (6)$$

$$\text{Var}(S) = E(S^2) - (E(S))^2 \quad (7)$$

З рівнянь (3) та (6) випливає, що дисперсія дорівнює:

$$\text{Var}(S_{i+1}) = S_i^2 e^{2r\Delta t} (e^{\sigma^2 \Delta t} - 1). \quad (8)$$

- Дисперсія для дискретної моделі:

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{i+1}) &= E(S_{i+1}^2) - (E(S_{i+1}))^2 = \\ &= p(S_i u)^2 + (1-p)(S_i d)^2 - S_i^2 (pu + (1-p)d)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

- Прирівнявши (8) та (9), отримаємо:

$$e^{2r\Delta t + \sigma^2 \Delta t} = pu^2 + (1-p)d^2. \quad (10)$$

- Маємо 2 рівняння (4) та (10) для визначення 3 невідомих u, d, p . Щоб остаточно визначити невідомі, виберемо собі третє рівняння:

$$ud = \gamma \quad (11)$$

Біноміальний метод. Модель Кокса-Росса-Рубінштейна

- У рівнянні (11) вибирається

$$\gamma = 1 \quad (12)$$

- Дерево з вузлами $Su^j d^k$, де $j + k = i$.

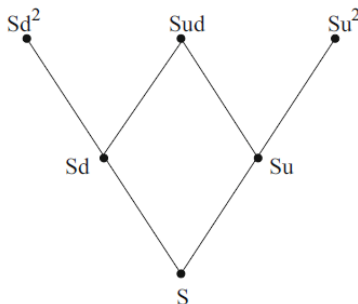


Рис.: Дерево біноміального методу

[] Seydel R.U. *Tools for Computational Finance*. 6th ed. / R.U. Seydel . – London: Springer-Verlag, 2017. – 508p.

Біноміальний метод. Модель Кокса-Росса-Рубінштейна

- При $\gamma = 1$ у дереві біноміального методу, кожен 2 кроки в часі повторюється початкове значення ціни на актив S_0 .

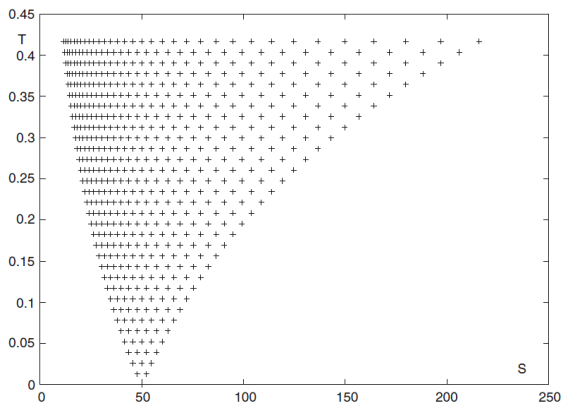


Рис.: Дерево біноміального методу при $M = 32$

[] Seydel R.U. *Tools for Computational Finance*. 6th ed. / R.U.

Seydel . – London: Springer-Verlag, 2017. – 508p.

- З рівнянь (4) та (10) отримуємо квадратне рівняння:

$$u^2 - 2\beta + \gamma = 0, \quad (13)$$

де $\beta = \frac{1}{2}(\gamma e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t})$.

- Розв'язки:

$$\begin{aligned} u &= \beta + \sqrt{\beta^2 - \gamma}, \\ d &= \gamma/u = \beta - \sqrt{\beta^2 - \gamma}, \\ p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \end{aligned} \quad (14)$$

- Розв'язки у випадку моделі Кокса-Росса-Рубінштейна:

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + O(\sqrt{\Delta t^3}), \\ d &= 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \\ p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \end{aligned} \quad (15)$$

- Ініціалізація дерева. Прямий хід.

- $S = S_0 = S_{0,0}$ - корінь дерева
- Для $i = 1, 2, \dots, M$ обчислюємо:

$$S_{j,i} := S_0 u^j d^{i-j}. \quad (16)$$

- Тепер вузли сітки $(S_{j,i}, t_i)$ - зафіксовані і в цих вузлах будемо обчислювати вартість опціону $V_{j,i} := V(S_{j,i}, t_i)$.

- Обчислення вартості опціону в вузлах.

- В кінцевий момент часу t_M вартість опціону $V(S, t_M)$ - відома. Тому вона відома і для кожного значення вартості акції $S_{j,M} = S_0 u^j d^{M-j}, j = 0, \dots, M$. Це визначає значення $V_{j,M}$: Call-опціон:

$$V_{j,M} := \max(S_{j,M} - K, 0). \quad (17)$$

Put-опціон:

$$V_{j,M} := \max(K - S_{j,M}, 0). \quad (18)$$

- Обчислення вартості опціону в вузлах (продовження)

- Обернений хід. Обчислимо значення V рекурентно для $t_{M-1}, t_{M-2}, \dots, t_0$:

$$V_{j,i} = e^{-r\Delta t}(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}). \quad (19)$$

- Для європейського опціону значення $V_{0,0}$ обчислене за рекурентною схемою (19) і буде шуканим наближенням вартості опціону в даний момент часу
- У випадку американського опціону, опціон може бути виконаний в будь-який момент часу, тому схема (19) мусить бути модифікована таким чином:

$$\begin{aligned} V_{j,i}^{continue} &= e^{-r\Delta t}(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}) \\ V_{j,i} &= \max\{\max\{S_{j,i} - K, 0\}, V_{j,i}^{continue}\} \text{ для Call-опціону} \\ V_{j,i} &= \max\{\max\{K - S_{j,i}, 0\}, V_{j,i}^{continue}\} \text{ для Put-опціону} \end{aligned} \quad (20)$$

- Обчислюємо $\Delta t := T/M$.
- u, d, p - обчислюємо за формулами(14).
 $S_{0,0} = S_0$
 $S_{j,M} = S_{0,0} u^j d^{M-j}, j = 0, 1, \dots, M$
Для американського опціону також обчислюємо
 $S_{j,i} = S_{0,0} u^j d^{i-j}$ для $0 < i < M, j = 0, 1, \dots, i$.
- Обчислюємо $V_{j,M}$ за формулами (17) - (18).
- Обчислюємо $V_{j,i}$ для $i < M$ за формулами (19) для європейського опціону і (20) для американського.
- Отримане таким чином значення $V_{0,0}$ - апроксимація $V_0^{(M)}$ шуканої вартості опціону $V(S_0, 0)$.

Метод скінченних різниць для моделі Блека-Шоулза

Стельмащук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

8 грудня 2022 р.

- Рівняння Блека-Шоулза:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (1)$$

- Рівняння Блека-Шоулза після заміни змінних (див. лекція 6):

$$y_\tau = y_{xx}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \tau \in (0, \frac{T\sigma^2}{2}) \quad (2)$$

- Після заміни змінних, термінальні умови для ціни опціону V замінюються на початкові умови для y :

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= (e^{(k+1)x/2} - e^{(k-1)x/2})^+ \text{ при } x \in (-\infty, \infty); \text{ для Call} \\ y(x, 0) &= (e^{(k-1)x/2} - e^{(k+1)x/2})^+ \text{ при } x \in (-\infty, \infty); \text{ для Put} \end{aligned} \quad (3)$$

$$k = \frac{2r}{\sigma^2} \quad (4)$$

Основи методу скінченних різниць. Різницеві апроксимації

- З розкладу в ряд Тейлора, кожна $f \in C^2$ задовольняє:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi) \quad (5)$$

де ξ - деяка точка між x та $x+h$.

- Рівномірна сітка:

$$\begin{aligned} \dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots \\ h &:= x_{i+1} - x_i \\ f_i &:= f(x_i) \end{aligned} \quad (6)$$

- Одностороння апроксимація:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad \forall f \in C^2 \quad (7)$$

Основи методу скінченних різниць. Різницеві апроксимації

- Двосторонні (центральні) апроксимації:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad \forall f \in C^3 \quad (8)$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad \forall f \in C^4 \quad (9)$$

- Двовимірна сітка вузлів для дискретизації задачі (2):

$$\begin{aligned}\Delta\tau &:= \tau_{max}/\nu_{max}, \tau_{max} = \frac{T\sigma^2}{2} \\ \Delta x &:= (b - a)/m\end{aligned}\tag{10}$$

Тут ми замінюємо нескінченний інтервал $-\infty < x < \infty$ на деякий скінченний $a = x_{min} < x < x_{max} = b$.

- Значення a та b вибираються з умови:

$$Ke^a = S_{min} < S < S_{max} = Ke^b\tag{11}$$

- Крім того, інтервал $[a, b]$ має містити відповідні x -значення для S_0 та K .
- w - розв'язок дискретизованої задачі, що відповідає задачі (2).

Основи методу скінченних різниць. Сітка

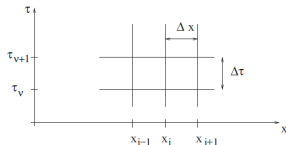


Рис.: Сітка

[] Seydel R.U. *Tools for Computational Finance*. 6th ed. / R.U. Seydel. – London: Springer-Verlag, 2017. – 508p.

- Позначення:

$$\begin{aligned}\tau_\nu &:= \nu \Delta \tau \text{ для } \nu = 0, 1, \dots, \nu_{\max} \\ x_i &:= a + i \Delta x \text{ для } i = 0, 1, \dots, m \\ y_{i,\nu} &:= y(x_i, \tau_\nu) \\ w_{i,\nu} &\approx y_{i,\nu}\end{aligned}\tag{12}$$

- $w_{i,\nu}$ - визначені лише в вузлах сітки
- Похибка апроксимації $e = w_{i,\nu} - y_{i,\nu}$ залежить від вибору параметрів дискретизації $\nu_{\max}, m, a, b$.

Явний (прямий) різницевий метод

- Апроксимації:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_{i,\nu}}{\partial \tau} &:= \frac{y_{i,\nu+1} - y_{i,\nu}}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau) \\ \frac{\partial^2 y_{i,\nu}}{\partial x^2} &:= \frac{y_{i,\nu+1} - 2y_{i,\nu} + y_{i-1,\nu}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)\end{aligned}\tag{13}$$

- Різницеве рівняння щодо w :

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i,\nu}}{\Delta \tau} = \frac{w_{i,\nu+1} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu}}{\Delta x^2}\tag{14}$$

- Позначення:

$$\lambda := \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2}\tag{15}$$

- Компактний запис:

$$w_{i,\nu+1} = \lambda w_{i-1,\nu} + (1 - 2\lambda)w_{i,\nu} + \lambda w_{i+1,\nu}\tag{16}$$

- $w^{(\nu)} := (w_{1,\nu}, \dots, w_{m-1,\nu})^T$
- Матриця:

$$A := A_{expl} := \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \quad (17)$$

- Різницеве рівняння в матричному записі:

$$w^{(\nu+1)} = Aw^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Явний (прямий) різницевий метод

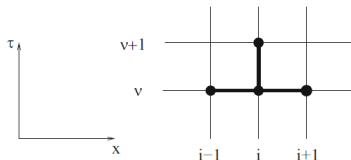


Рис.: Шаблон явного різницевого методу

[] Seydel R.U. *Tools for Computational Finance*. 6th ed. / R.U. Seydel. – London: Springer-Verlag, 2017. – 508p.

Стійкість схеми

Явний різницевий метод не завжди стійкий. Умова стійкості:

$$0 < \Delta\tau < \frac{\Delta x^2}{2} \quad (19)$$

Неявний (зворотній) різницевий метод

- Апроксимація похідної по часу:

$$\frac{\partial y_{i,\nu}}{\partial \tau} := \frac{y_{i,\nu} - y_{i,\nu-1}}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau) \quad (20)$$

- Компактний запис різницевої схеми:

$$-\lambda w_{i+1,\nu} + (1 + 2\lambda)w_{i,\nu} - \lambda w_{i-1,\nu} = w_{i,\nu-1} \quad (21)$$

- Матриця:

$$A := A_{impl} := \begin{bmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{bmatrix} \quad (22)$$

Неявний (зворотній) різницевий метод

- Різницеве рівняння в матричному записі:

$$Aw^{(\nu+1)} = w^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \nu_{\max} - 1 \quad (23)$$

- На кожній ітерації методу необхідно розв'язувати СЛАР (23). Матриця - тридіагональна, тому складність розв'язування СЛАР - $O(m)$.
- Схема неявного різницевого методу **безумовно стійка** $\forall \Delta\tau > 0$.

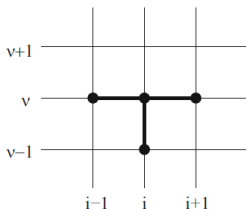


Рис.: Шаблон неявного різницевого методу

Різниццева схема Кранка-Ніколсона

- Попередньо розглянуті різницеві схеми наближали $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ з точністю $O(\Delta \tau)$. Було б добре побудувати різницеву схему, яка є безумовно стійкою та наближає $\frac{\partial y}{\partial \tau}$ з точністю $O(\Delta \tau^2)$.
- Кранк та Ніколсон запропонували усереднити прямий та зворотній різницеві методи. В результаті отримуємо такий компактний запис різницевої схеми:

$$\frac{w_{i,\nu+1} - w_{i,\nu}}{\Delta \tau} = \frac{1}{2\Delta x^2} (w_{i+1,\nu} - 2w_{i,\nu} + w_{i-1,\nu} + w_{i+1,\nu+1} - 2w_{i,\nu+1} + w_{i-1,\nu+1}) \quad (24)$$

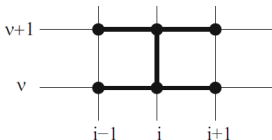


Рис.: Шаблон різницевого методу Кранка-Ніколсона

- Матриці:

$$A := A_{CN} := \begin{bmatrix} 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$B := B_{CN} := \begin{bmatrix} 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda \end{bmatrix} \quad (26)$$

- Різницеве рівняння в матричному записі:

$$Aw^{(\nu+1)} = Bw^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \nu_{\max} - 1 \quad (27)$$

Теорема (Кранк та Ніколсон)

- Для $u \in C^4$ похибка наближеного розв'язку дорівнює $O(\Delta\tau^2) + O(\Delta x^2)$
- Для кожної ітерації в часі ν потрібно розв'язувати СЛАР з тридіагональною матрицею.
- Схема стійка для будь-якого $\Delta\tau > 0$

Доведення: [] Seydel R.U. *Tools for Computational Finance*. 6th ed. / R.U. Seydel . – London: Springer-Verlag, 2017. – 508p.

- Вибираємо m, ν_{max} , обчислюємо $\Delta x, \Delta \tau$.
- Обчислюємо $w_i^{(0)} = y(x_i, 0)$ за даними початковими умовами (3), $0 \leq i \leq m$.
- Формуємо матриці A та B .
- В циклі для $\nu = 0, 1, \dots, \nu_{max} - 1$ розв'язуємо СЛАР

$$Aw^{(\nu+1)} = Bw^{(\nu)} \quad (28)$$

- Крайові умови:

$$\begin{aligned}y(x, \tau) &= r_1(x, \tau) \text{ при } x \rightarrow -\infty, \\ y(x, \tau) &= r_2(x, \tau) \text{ при } x \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{29}$$

- Call опціон:

$$\begin{aligned}r_1(x, \tau) &= 0, \\ r_2(x, \tau) &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}.\end{aligned}\tag{30}$$

- Put опціон:

$$\begin{aligned}r_1(x, \tau) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau}, \\ r_2(x, \tau) &= 0.\end{aligned}\tag{31}$$

Врахування крайових умов в схемі Кранка-Ніколсона

- Крайові умови в дискретизованій задачі виглядатимуть наступним чином:

$$\forall \nu \quad \begin{aligned} w_{0,\nu} &= r_1(a, \tau_\nu), \\ w_{m,\nu} &= r_2(b, \tau_\nu). \end{aligned} \quad (32)$$

- Вектор крайових умов для схеми Кранка-Ніколсона:

$$d^{(\nu)} := \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} r_1(a, \tau_{\nu+1}) + r_1(a, \tau_\nu) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ r_2(b, \tau_{\nu+1}) + r_2(b, \tau_\nu) \end{bmatrix} \quad (33)$$

- Матричний запис схеми Кранка-Ніколсона:

$$Aw^{(\nu+1)} = Bw^{(\nu)} + d^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \nu_{\max} - 1 \quad (34)$$

Моделювання відсоткових ставок. Процес Орнштейна-Уленбека. Модель Васічека

Стельмащук Віталій Володимирович

Львівський національний університет імені Івана Франка
Кафедра інформаційних систем

15 грудня 2022 р.

- Виділяють стохастичні процеси, в яких значення випадкової змінної в часі повертаються до її середнього значення (математичного сподівання). Такі процеси в англomовній літературі називають **mean-reverting processes**.
- Процес Орнштейна-Уленбека:

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

Тут θ - коефіцієнт збігу випадкової змінної X_t до її середнього, μ - середнє значення випадкової змінної X_t , σ - волатильність (стандартне відхилення) випадкової змінної X_t , W_t - вінерівський процес.

- Насправді ринкова відсоткова ставка - це не стала величина, тому виникає потреба в моделюванні її поведінки.
- Модель Васічека передбачає, що ринкова відсоткова ставка r_t слідує процесу Орнштейна-Уленбека з $\mu > 0$.

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (2)$$

Тут κ - коефіцієнт збігу випадкової змінної r_t до її середнього, $\theta > 0$ - середнє значення випадкової змінної r_t , σ - волатильність (стандартне відхилення) випадкової змінної r_t , W_t - вінерівський процес.

- Недоліком моделі є те, що вона не виключає від'ємних значень r_t .

- Аналітичний розв'язок стохастичного диференціального рівняння моделі Васічека (виводиться з леми Іто для $r_t e^{\kappa t}$):

$$r_t = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dW_s \quad (3)$$

- Змінна r_t - нормально розподілена з математичним сподіванням:

$$E(r_t) = r_0 e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) \quad (4)$$

та дисперсією:

$$\text{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) \quad (5)$$

- Модель Кокса-Інгерсолла-Росса (Cox-Ingersoll-Ross model):

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (6)$$

виключає можливість негативних значень для змінної r_t .

- Модель Халла-Вайта (Hull-White model):

$$dr_t = (\theta_t - \alpha_t r_t)dt + \sigma_t dW_t \quad (7)$$

Облігації з нульовим купоном та оцінка їх вартості

- Облігація з нульовим купоном (zero-coupon bond) передбачає, що в певний момент часу T у майбутньому інвестору виплатять її номінальну вартість (face value) X .
- Виникає питання: скільки грошей Y варто заплатити інвестору за таку облігацію у кожен момент часу $t < T$.
- У випадку сталої відсоткової ставки r - це Present Value, тобто

$$Y = X * e^{-r(T-t)}. \quad (8)$$

- У випадку ж змінної в часі відсоткової ставки r_t :

$$Y = X * e^{-\int_t^T r(s)ds}. \quad (9)$$

- Значення $r(s)$ визначаються стохастичними процесами моделей Васічека, Кокса-Інгерсолла-Росса чи Халла-Вайта. Замість аналітичного розв'язку для рівнянь з цих моделей можна використовувати метод Монте-Карло і усереднювати згенеровані траєкторії модельованого стохастичного процесу.